

Etude des propriétés spectrales de sources lasers à l'aide de la technique de battement de fréquences

Version du 21 février 2013

1 Introduction

La technique de battement de fréquences est couramment utilisée pour l'étude des propriétés spectrales des sources lasers : mesure de fréquence, de stabilité en fréquence *etc.* L'analyse des données est réalisée à l'aide de la variance à deux échantillons ou variance d'Allan. Cet outil statistique permet d'identifier la nature du bruit sur différentes gammes de fréquence, c'est-à-dire à différentes échelles du temps. Dans les sections suivantes seront présentées des bases théoriques, la mise en pratique de la technique et enfin la suite des mesures expérimentales à effectuer.

2 Notions théoriques

2.1 La fréquence d'un oscillateur

Le signal $A(t)$ délivré par un oscillateur d'amplitude nominale A_0 stable mais dont la phase $\varphi(t)$ subit des perturbations de nature déterministe ou aléatoire peut être modélisé par la relation suivante :

$$A(t) = A_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi(t)) \quad (1)$$

où ν_0 est la fréquence nominale du signal. Si l'écart de phase $\varphi(t)$ varie de manière aléatoire, alors la moyenne temporelle $\overline{\varphi(t)}$ est nulle. La phase instantanée du signal

$$\Phi(t) = 2\pi\nu_0 t + \varphi(t). \quad (2)$$

A partir de celle-ci, on définit la fréquence instantanée du signal

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (3)$$

La fonction aléatoire $\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$ représente les fluctuations de fréquence du signal autour de sa valeur moyenne ν_0 . Il sera par la suite commode de définir la fluctuation *relative* de fréquence instantanée :

$$y(t) = \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (4)$$

A l'instar du bruit de fréquence, l'écart de fréquence instantanée normalisée n'est pas une grandeur observable. On ne peut ainsi en connaître que la valeur moyenne sur un intervalle de temps τ commençant à l'instant t_k , que l'on appelle habituellement échantillon \bar{y}_k , suivant la relation

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt. \quad (5)$$

Tableau 1 – Les différents types du bruit fréquemment rencontrés

Nom du bruit	Origine	$S_y(f)$
Marche aléatoire de fréquence	Environnement	$h_{-2}f^{-2}$
Bruit de scintillation de fréquence	Résonateur	$h_{-1}f^{-1}$
Bruit blanc de fréquence	Bruit thermique	h_0
Bruit de scintillation de phase	Bruit électronique	h_1f
Bruit blanc de phase	Bruit blanc externe	h_2f^2

Ainsi, pour étudier les fluctuations de fréquence (ou de phase) d'un oscillateur, on étudie généralement une séquence de N échantillons \bar{y}_k , la valeur de N étant suffisamment grand pour que l'on puisse effectuer une étude à des échelles de temps très différentes. Ces échantillons peuvent être jointifs ($t_k = t + k\tau$ avec k entier) ou non, c'est-à-dire sans ou avec un temps mort.

2.2 Modèle de bruit en loi de puissances

Pour rendre compte de tous types de bruit pouvant perturber un oscillateur réel, on utilise très souvent un modèle de bruit en lois de puissance. On considère alors que la densité spectrale $S_y(f)$ peut s'écrire comme la somme de cinq types de bruit indépendants, chacun correspondant à une loi de puissance différente (Tableau 1) :

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^{+2} h_{\alpha} f^{\alpha} \quad (6)$$

où α est entier. On utilise ici f pour l'échelle de fréquence du bruit tandis que $S(f)$ aura des unités de fréquence carré (ν_0^2) par fréquence (f) dans le cas actuel. Notons toutefois que les notions développées ici peuvent être tout aussi bien appliquées à l'étude de la stabilité d'autres variables telle une tension électrique, par exemple.

2.3 Variance d'Allan

La variance classique n'est pas un moyen pertinent pour caractériser les fluctuations de fréquence d'un oscillateur. En particulier, elle diverge à basse fréquence pour le bruit de scintillation et la marche aléatoire de fréquence. D.W. Allan (*Proc. IEEE*, **54(2)**, 221-230 (1966)) a proposé une autre variance, dite à deux échantillons, comme estimateur pour analyser les fluctuations de fréquence. Elle est souvent appelée variance d'Allan et son expression est la suivante :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \rangle \quad (7)$$

où

$$y_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt \quad (8)$$

et τ est la durée de mesure. Une expression équivalente est

$$\sigma_y^2(\tau) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^m (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2. \quad (9)$$

Cette variance présente l'avantage de converger quand $m \rightarrow \infty$ pour les cinq types de bruit cités ci-dessus. (Pour les cas rares de bruit en f^{-3} ou f^{-4} , il faut faire appel à d'autres estimateurs tels les variances de Picinbono ou de Hadamard).

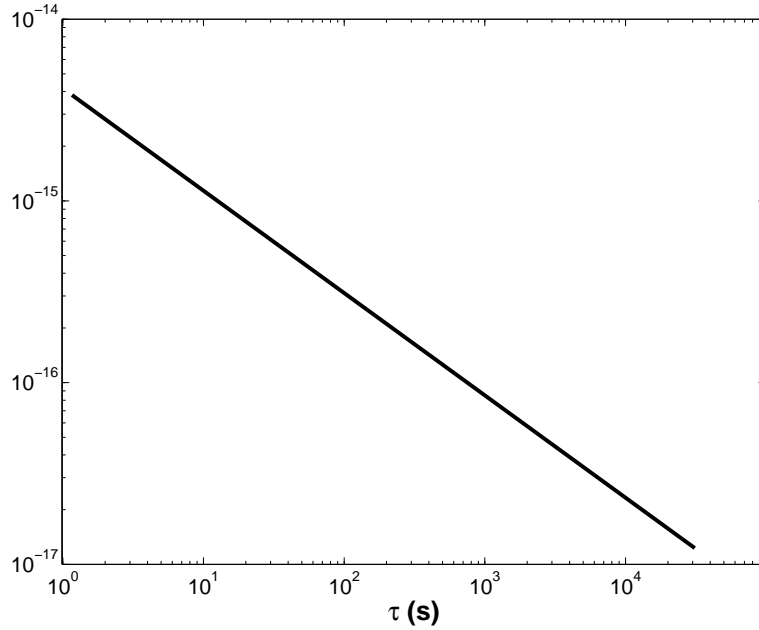


FIGURE 1 – Déviation Allan relative pour un bruit de fréquence

2.3.1 Calcul avec ou sans recouvrement

Pour calculer la variance d'Allan sur une durée $\tau = n\tau_0$, on peut procéder de deux façons différentes :

- soit on décale la séquence de calcul d'un intervalle τ à chaque itération du moyennage (variance sans recouvrement)
- soit on décale cette séquence d'un intervalle τ_0 lors de chaque itération (variance avec recouvrement).

C'est la deuxième méthode qui est généralement employée. Elle présente l'avantage de conduire à une moins grande dispersion des résultats grâce à un plus grand nombre de termes intervenant dans le moyennage. La première méthode peut être néanmoins préférée lorsqu'il est nécessaire de ne faire intervenir que des échantillons statistiquement indépendantes.

Considérons une séquence de N échantillons d'écarts de fréquence normalisés, intégrés sur une durée τ sans temps mort. Le calcul de la variance d'Allan avec recouvrement pour des durées τ croissantes de τ_0 à $N\tau_0/2$ s'effectue de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^2(\tau_0) &= \frac{1}{2(N-1)} [(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{y}_3 - \bar{y}_2)^2 + \dots + (\bar{y}_N - \bar{y}_{N-1})^2] \\
 \sigma_y^2(2\tau_0) &= \frac{1}{2(N-3)} \left[\left(\frac{\bar{y}_3 + \bar{y}_4}{2} - \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\bar{y}_4 + \bar{y}_5}{2} - \frac{\bar{y}_2 + \bar{y}_3}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\bar{y}_{N-1} + \bar{y}_N}{2} - \frac{\bar{y}_{N-3} + \bar{y}_{N-2}}{2} \right)^2 \right] \\
 &\dots = \dots\dots\dots \\
 \sigma_y^2(N\tau_0/2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{y}_{N/2+1} + \dots + \bar{y}_N}{N/2} - \frac{\bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_{N/2}}{N/2} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Il faut noter que le calcul sans recouvrement est identique pour $\sigma_y^2(\tau_0)$ et $\sigma_y^2(N\tau_0/2)$.

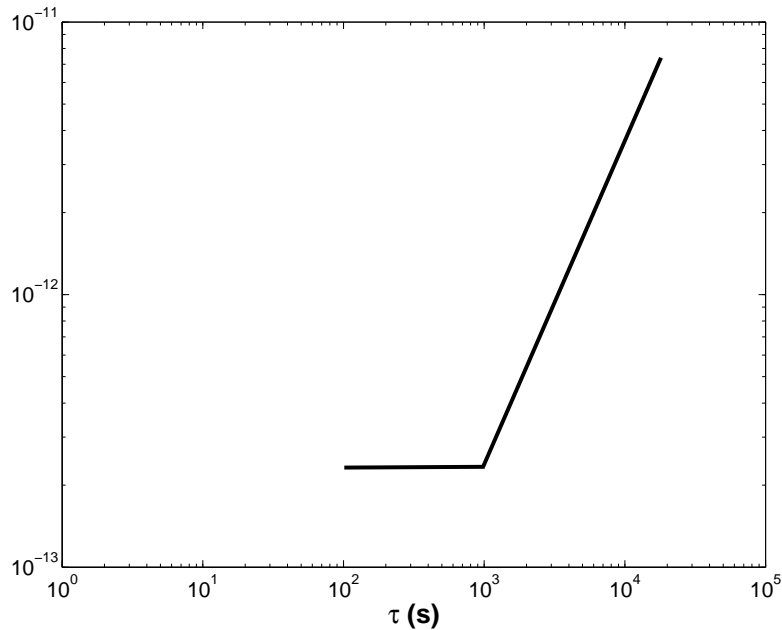


FIGURE 2 – Déviation Allan relative pour un bruit de scintillation (anglais *flicker*) de fréquence

FIGURE 3 – Deux algorithmes de calcul de la variance d’Allan, sans recouvrement (haut) ou avec (bas). Dans cet exemple, le temps d’intégration τ vaut quatre fois le temps d’échantillonnage τ_0 .

2.3.2 Définition de la variance d’Allan dans le domaine spectral

On montre que la variance d’Allan s’écrit, dans le domaine spectral, en fonction de la densité spectrale de puissance de bruit $S_y(f)$ comme :

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^\infty S_y(f) \frac{\sin^4(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2} df. \quad (11)$$

Cette intégrale converge pour les cinq types de bruit du modèle en lois de puissance, à condition que l’on introduise une fréquence de coupure supérieure f_h dans le cas des bruits en f et f^2 . Le tableau 2 donne l’expression analytique pour chaque cas.

Dans le cas actuel, les deux bruits les plus importants sont le bruit blanc et le bruit de scintillation de fréquence.

2.3.2.1 Bruit blanc Pour une source laser, le bruit blanc est un bruit irréductible lié à la statistique des photons. Sur le graphique de l’écart-type d’Allan, ce bruit se manifeste pour des temps d’intégration courts (typiquement une seconde à quelques minutes). La courbe théorique décroît avec une loi en $\tau^{-1/2}$ ou en échelle logarithmique avec une pente $-1/2$. Si ce bruit était le seul type présent, il suffirait de moyennner pendant des temps de plus en plus longs pour mieux déterminer la fréquence du laser. Toutefois, au bout d’un certain temps,

Tableau 2 – Expression de la variance d'Allan $\sigma_y^2(\tau)$ pour différentes lois de la densité spectrale de puissance $S_y(f)$.

$S_y(f)$	$h_{-2}f^{-2}$	$h_{-1}f^{-1}$	h_0	h_1f	h_2f^2
$\sigma_y^2(\tau)$	$\frac{2\pi^2 h_{-2}\tau}{3}$	$2 \ln(2)h_{-1}$	$\frac{h_0}{\tau}$	$\frac{[1,038+3 \ln(2\pi f_h\tau)]h_1}{4\pi^2\tau^2}$	$\frac{3h_2f_h}{4\pi^2\tau^2}$

selon le système en question, la courbe de l'écart-type d'Allan ne descend plus et atteint un plancher dit plancher de scintillation (anglais "*flicker floor*").

2.3.2.2 Bruit de scintillation de fréquence Le bruit de scintillation est un phénomène universel d'origines diverses. Il est également appelé bruit en $1/f$ du fait de son comportement fréquentiel. Le terme anglais "flicker" provient de la scintillation d'une flamme "*flickering flame*." Ce bruit se manifeste par des dérives à long terme et le palier représente l'optimum de stabilité en fréquence du laser. Le temps au delà duquel apparaît le plancher de scintillation représente la durée de moyennage utile.

2.4 Principe de la technique de battement de fréquences

Soient deux sources lasers émettant deux ondes électromagnétiques d'amplitude \vec{E}_1 et \vec{E}_2 de même polarisation et de fréquences ν_1 et ν_2 :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \cos(2\pi\nu_1 t + \phi_1) \quad (12)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \cos(2\pi\nu_2 t + \phi_2). \quad (13)$$

Le champ électrique total en un point P de l'espace (ici la surface de la lame séparatrice) où les deux ondes se superposent s'écrit

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (14)$$

Le détecteur est sensible à la moyenne temporelle de la valeur quadratique du champ :

$$\begin{aligned} E^2 &= |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 \\ &= E_{10}^2 \cos^2(2\pi\nu_1 t + \phi_1) + E_{20}^2 \cos^2(2\pi\nu_2 t + \phi_2) + 2E_{10}E_{20} \cos(2\pi\nu_1 t + \phi_1) \cos(2\pi\nu_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (15)$$

La moyenne temporelle des deux premiers termes donne une constante $\frac{1}{2}(E_{10}^2 + E_{20}^2)$. Pour évaluer le terme croisé, on se sert de l'identité trigonométrique

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)] \quad (16)$$

ce qui donne

$$E^2 = \frac{1}{2}(E_{10}^2 + E_{20}^2) + \frac{1}{2} \cos[2\pi(\nu_1 + \nu_2)t + (\phi_1 + \phi_2)] + \frac{1}{2} \cos[2\pi(\nu_1 - \nu_2)t + (\phi_1 - \phi_2)]. \quad (17)$$

La somme des fréquences est de l'ordre de 1000 THz alors que la bande passante du détecteur vaut 2 GHz. Par conséquent le signal mesuré ne contient que le terme de différence de fréquence (hétérodyne).

3 Partie expérimentale

Le schéma de principe pour la mise en œuvre de la technique de battement de fréquences est décrit sur la figure **ref Montage**. Les deux faisceaux lumineux issus des sources lasers sont mélangés via un miroir et une lame séparatrice et le faisceau combiné détecté par une photodiode à avalanche. Le signal de battement est amplifié puis envoyé sur un fréquencemètre. L'acquisition de données à partir du fréquencemètre ainsi que leur traitement sont assurés par un micro-ordinateur via une carte d'interface IEEE (GPIB). L'analyseur de spectre permet de contrôler à tout instant la qualité du battement de fréquences. La stabilité relative d'une source laser émettant une fréquence ν_0 sera évaluée à partir de la variance d'Allan relative

$$\sigma_R = \frac{\sigma_y(\tau)}{\nu_0}. \quad (18)$$

Dans la suite de cette section on présente tout d'abord le matériel mis à disposition puis les mesures à effectuer.

3.1 Matériel disponible

Le montage est supporté par une table optique de marque Micro-contrôle munis de trous M6 séparées de 25 mm.

3.1.1 Sources lasers

Nous utilisons des sources lasers de deux marques différentes. L'un des modèles est un Spectra Physics 117A (vendu actuellement par Newport en tant que modèle R-32734) dont on peut stabiliser soit la fréquence, soit la puissance (intensité). En mode intensité, la laser est censé avoir une stabilité à court terme (*allez savoir ce que cela veut dire*) de 2 % ou mieux. Pour le mode fréquence, une stabilité meilleure que ± 300 kHz peut être atteinte (*là encore, on se demande à quelle échelle de temps*). L'ensemble des caractéristiques est résumé sur la figure 5 (**à insérer**). Nous disposons de deux sources laser s de ce modèle notées L(S1) et L(S2). Le second modèle, L(INM) a été fabriqué à l'Institut National de Métrologie (actuel LCM-LNE-Cnam). Il est stabilisé en fréquence par une méthode analogue à celle des lasers Spectra Physics et possède quasiment les mêmes caractéristiques. La principale différence réside dans la longueur de la cavité laser. **Les sources lasers sont de classe IIIa (visibles, de puissance moyenne 1- 5 mW) dont le faisceau direct peut provoquer des dégâts oculaires.**

3.1.2 Détecteur rapide

Le premier élément de la chaîne de détection est une photodiode à avalanche au silicium (Amplified Silicon Detector modèle ET 2030A) dont la courbe de réponse est centrée autour de 780nm. Sa bande passante d'environ 2 GHz permet de détecter le signal à la fréquence de battement. Les caractéristiques du détecteur sont résumées figure 6 (**à insérer**).

3.1.3 Analyseur de spectre

L'analyseur de spectre Hameg modèle HM5010 est utilisé pour détecter et optimiser le signal de battement pour des fréquences jusqu'à 1 GHz.

3.1.4 Fréquencemètre

Le signal provenant du module photodiode rapide est relié à un fréquencemètre HP 53131A/132A, connecté à l'ordinateur via une interface IEEE. Le fréquencemètre permet la mesure des fréquences jusqu'à 3 GHz. Sa notice technique est disponible au laboratoire et facile à trouver sur Internet :

http://www.teknetelectronics.com/DataSheet/HP_AGILENT/HP_531xxseries.pdf

3.1.5 Acquisition et traitement des données

Les données sont acquises à l'aide de l'ensemble fréquencemètre-ordinateur. Le transfert des commandes vers le fréquencemètre ainsi que la récupération des données sur l'ordinateur se font par l'intermédiaire d'une carte IEEE et d'un programme écrit dans le logiciel LabVIEW (fichier HP5313A.vi). Ce programme permet de choisir le temps d'intégration et le nombre de mesures. Les valeurs de la fréquence de battement sont affichées instantanément sur la fenêtre LabVIEW. Quant au traitement des données, la fréquence moyenne et l'écart-type relatif d'Allan sont calculés. Les résultats sont affichés sous forme de tableau et sur un graphique où l'on reporte la variance d'Allan en ordonnée et en abscisse le temps d'intégration. Il est possible de récupérer les données brutes sous un format .txt.

ATTENTION :

Pour chaque partie du travail expérimental, vous devez faire une centaine de mesures. Pour le compte-rendu, vous devez également récupérer les données brutes et les analyser vous-même en développant un programme pour calculer la variance d'Allan avec recouvrement. Pour cela nous vous recommandons le logiciel Python.

3.2 Procédure

Les sources lasers sont mises en route par un enseignant une heure avant la séance pour permettre leur stabilisation thermique.

- Mettre en marche le fréquencemètre, l'analyseur de spectre, le photodétecteur et l'ordinateur.
- Vérifier le réglage optique des faisceaux lasers en s'assurant que les taches lumineuses sont superposées à deux positions différentes de l'écran de visualisation (ou une feuille de papier ou du carton clair).
- Si c'est bien le cas, vous pouvez visualiser le signal de battement de fréquence sur l'analyseur de spectre et optimiser son amplitude en retouchant l'alignement optique. On utilise une atténuation de 20 dB sur l'analyseur.

3.3 Mesures à effectuer

3.3.1 Mesure de l'intervalle spectral libre du laser S_1

Asservir en fréquence le laser S_1 en tournant la clé située sur la face avant du boîtier ce contrôle vers la position "fréquence." Bien que ce laser soit censé être monomode, il subsiste un second mode environ mille fois moins intense dont on va se servir pour déterminer l'intervalle spectrale libre (*ISL*) de la cavité laser. Cet intervalle de fréquence est donné par $c/2nd$ où $c=299\,792\,458\text{ ms}^{-1}$ est la vitesse de la lumière dans le vide, d la séparation des miroirs et n l'indice de réfraction du milieu (proche de 1 mais dont la différence varie

rapidement avec la fréquence au voisinage d'une résonance d'absorption du milieu). On se propose dans cette partie de déterminer la distance d et la variance d'Allan de celle-ci. Pour cela suivez la procédure suivante :

- Placer un cache sur le trajet des faisceaux lumineux issus de l'autre ou des deux autres sources laser
- Brancher la sortie du détecteur rapide sur l'entrée de l'amplificateur et la sortie de l'amplificateur, l'entrée analyseur de spectre et celle du fréquencemètre
- Visualiser le signal de battement de fréquence sur l'analyseur de spectre et l'optimiser
- S'assurer que la valeur de cette fréquence est stable
- Lancer le programme d'acquisition pour un temps d'intégration de 1 s.
- Déduire la valeur de d
- Le programme calcule la variance d'Allan relative à une fréquence de 473 THz. Déterminer la variance d'Allan par rapport à l'intervalle spectral libre.

3.3.2 Mesure de l'intervalle spectral libre du laser INM

Refaire la manipulation précédente pour le laser INM. Conclure.

3.3.3 Battement de fréquence entre les deux lasers S_1 et INM asservis en fréquence

- Asservir en fréquence les deux sources lasers. En agissant sur le commutateur "red/blue" on peut asservir en fréquence le laser INM sur deux modes différents : mode basse fréquence (rouge) ou haute fréquence (bleu).
- En agissant sur le miroir de sortie du laser INM et sur la lame séparatrice, optimiser le signal de battement à 0 dB sans passer par l'amplificateur.
- Mesure la fréquence de battement pour environ 100 échantillons et calculer la variance d'Allan pour chacune des deux positions. Réaliser ces mesures pour deux temps d'intégrations différents : 0,1 s et 1,0 s. Commenter les courbes obtenues.
- En utilisant les valeurs moyennes de la fréquence de battement obtenues pour les deux positions (rouge/bleu) du boîtier d'asservissement du laser, INM, déduire l'intervalle spectral libre de celui-ci. Détailler la démarche de calcul utilisé. Conclure.

3.3.4 Battement de fréquence entre les deux lasers S_1 et S_2 asservis en fréquence

Asservir en fréquence les deux lasers S_1 et S_2 . Mesurer la fréquence de battement (prendre environ 100 échantillons), calculer la variance d'Allan et conclure.