

# Cnam /U. Paris-Nord Master Physique et applications MR28

## Travaux pratiques de traitement du signal

### Analyse spectrale

## 1 Introduction

L'objectif de cette manipulation est d'apprendre à se servir de l'outil central de l'analyse spectrale : l'analyseur de spectre à radio-fréquences. Cet appareil est conçu pour mesurer la densité spectrale du signal d'entrée intégrée dans une bande passante  $\delta f$  autour d'une fréquence centrale d'analyse  $f$ .

Le signal d'entrée  $x(t)$  est échantillonné et des algorithmes adaptés permettent d'en calculer la transformée de Fourier discrète (*TFD*). Le nombre d'échantillons est toujours une puissance de 2, afin de permettre l'emploi de l'algorithme de transformée de Fourier rapide (*TFR* ou en anglais *FFT* abrégé de l'expression *Fast Fourier Transform*). La méthode de traitement numérique du signal peut induire des erreurs d'interprétation du spectre mesuré. Dans le préambule nous rappelons quelques notions essentielles pour le déroulement du TP. Dans la description de la partie pratique, nous aborderons principalement les erreurs classiques rencontrées dans le traitement numérique du signal et les solutions idoines.

## 2 Préambule

### 2.1 Analyse spectrale

#### 2.1.1 Échantillonnage du signal

Pour tout traitement numérique (exemple Transformée de Fourier discrète), le signal continu  $x(t)$  est d'abord échantillonné pour le mettre sous forme d'une suite de nombres compréhensibles par l'ordinateur. Le signal  $x(t)$ , dont la TF est  $X(f)$ , est donc multiplié par un peigne de Dirac de pas  $h$ , ce qui a pour effet de rendre le spectre périodique avec une période  $1/h$ , on obtient :

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kh)\delta(t - kh). \quad (1)$$

Sa transformée de Fourier (discrète) est

$$X^*(f) = \frac{1}{h} \sum_{k=-N/2}^{N/2} x^*(kh) \exp(-2\pi j f kh) = \frac{1}{h} \sum_{k=-N/2}^{N/2} X(f - \frac{k}{h}) \quad (2)$$

A la fin de cette opération, la transformée de Fourier discrète ne diffère de celle du signal original que par :

- un éventuel repliement de spectre ;
- un facteur multiplicatif  $1/h$  dans le spectre ;
- la périodicité du spectre (période  $1/h$ ).

Si le spectre est à support borné, la condition de Shannon ( $h < 1/2f_m$ ) peut être respectée et il n'y a pas de repliement. En général, cependant, la fréquence maximale  $f_m$  du signal est inconnue. Pour s'assurer que le critère de Shannon soit respectée autant que possible, il faut utiliser un pas d'échantillonnage petit, ce qui prend du temps et de l'espace mémoire. Plus le pas  $h$  est petit, plus son inverse  $1/h$  est grand et plus  $X^*(f)$  ressemble à  $X(f)$  à la périodicité près.

### 2.1.2 Erreur de recouvrement (aliasing)

Si la condition de Shannon n'est pas respectée, il apparaît dans le spectre des raies parasites, qui sont des répliques du vrai spectre, centrées sur les fréquences  $\pm f_e, \pm 2f_e, \dots$  (repliements) ( $f_e = 1/h$  fréquence d'échantillonnage). Comme on ne connaît pas en générale  $f_m$ , on interpose avant l'échantillonnage un filtre "antirepliement" qui supprime dans  $x(t)$  toutes les fréquences supérieures à une fréquence de coupure  $f_c$  et l'on choisit ensuite une fréquence d'échantillonnage  $f_e > 2f_c$ .

### 2.1.3 Troncature du signal

Pour des raisons d'espace mémoire et de temps de calcul, on est amené à limiter le signal échantillonné à un nombre fini  $N$  d'échantillons. La durée d'observation du signal est  $T = Nh$ . Cela revient à multiplier le signal temporel par une fenêtre de durée  $T$  qui s'écrit  $\text{rect}(t/T)$ . Pour le spectre, on obtient la convolution de  $X^*(f)$  par  $T\text{sinc}(fT)$  (où  $\text{sinc}(x)$  désigne la fonction sinus cardinal  $\sin(\pi x/\pi x)$ ). Ainsi, la troncature du signal dans le domaine temporel, entraîne dans le domaine fréquentiel des oscillations dans le spectre (phénomène de Gibbs). Pour les réduire, il faut élargir la fenêtre temporelle d'observation  $T$ . Puisque le produit des largeurs des deux fonctions  $\text{sinc}(fT)$  et  $\text{rect}(t/T)$  reste constante, une telle opération revient à faire tendre la fonction  $\text{sinc}$  vers une fonction de Dirac et à augmenter le nombre d'échantillons, ce qui n'est pas toujours possible.

$$\bar{x}^*(t) = x^*(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kh) \cdot \delta(t - kh) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (3)$$

$$\bar{X}^*(f) = \frac{T}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{h}\right) * \frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} = N \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{nN}{T}\right) * \frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} \quad (4)$$

Le produit de convolution fréquentiel dû à la troncature temporelle se manifeste aussi par un étalement spectral (en anglais *leakage*). Chaque composante spectrale du signal à analyser se répercute sur la totalité de la gamme des fréquences d'analyse. La résolution fréquentielle de l'analyse en est inévitablement dégradée. En particulier, il est impossible de distinguer deux composantes de  $X(f)$  distantes de moins de  $1/T$  qui seront mélangées.

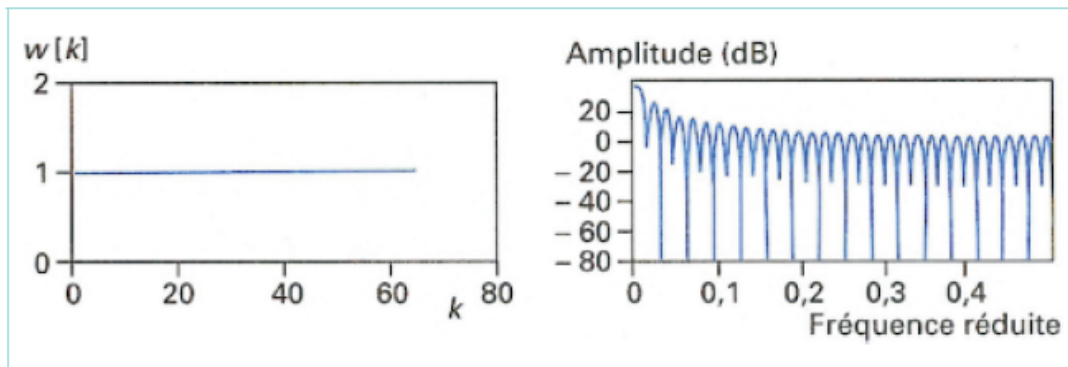


FIGURE 1 – Représentation temporelle et fréquentielle de la fenêtre de troncature (rectangulaire) pour  $N=64$ .

#### 2.1.4 Fenêtre de pondération

Le but de la pondération est de réduire les effets néfastes de la troncature du signal. Les fenêtres de pondération sont choisies pour réduire la largeur de lobe principal et l'amplitude des lobes secondaires. On rappelle que la largeur du lobe principal agit directement sur la résolution en fréquence : plus le lobe principal est étroit meilleure est la résolution. La hauteur des lobes secondaires joue sur le phénomène d'étalement : plus leur hauteur est grande, plus cette erreur est importante.

On peut considérer un analyseur de spectre par TF qui fonctionne comme une batterie de filtres étroits parallèles et jointifs sélectionnant  $N/2$  fréquences. Chaque filtre a une réponse en fréquence  $W(f)$  qui est la TF de la fonction fenêtre  $W(t)$ . Les analyseurs numériques offrent généralement un nombre importante de fenêtres, chacune d'entre elles réalisant un compromis entre la largeur du lobe principale et la hauteur des lobes secondaires. Le choix de la meilleure fenêtre dépend du signal à analyser et de l'objectif de l'utilisateur. Une bonne solution consiste généralement, pour un signal donné, à effectuer plusieurs mesures successives avec des fenêtres de pondérations différentes.

Deux fenêtres sont particulièrement utilisées :

##### – Fenêtre de Hanning

$$W(t) = \frac{1}{3} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi t}{T} \right]; |t| < \frac{T}{2} \quad W(t) = 0; |t| > \frac{T}{2} \quad (5)$$

dans l'espace des fréquences :

$$W(f) = \frac{T}{2} \left[ \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right] + \frac{T}{2} \left[ \frac{\sin \pi (f - \frac{1}{T}) T}{\pi (f - \frac{1}{T}) T} + \frac{\sin \pi (f + \frac{1}{T}) T}{\pi (f + \frac{1}{T}) T} \right] \quad (6)$$

La fenêtre de Hanning procure une atténuation importante (-32 dB) des lobes secondaires, au prix d'un élargissement du lobe principal et par conséquent d'une diminution

de la résolution. N.B. Il existe une autre fenêtre assez employée de nom similaire, celle de Hamming. Tâchez de ne pas les confondre!

– Fenêtre à "toit plat" (Flat top)

$$W(t) = \left[ 1 - 1,96 \cos^2 \frac{2\pi t}{T} + 1,26 \cos^4 \frac{2\pi t}{T} - 0,388 \cos^6 \frac{2\pi t}{T} + 0,0322 \cos^8 \frac{2\pi t}{T} \right] \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right); \quad (7)$$

Par rapport à la fenêtre de Hanning La fenêtre à toit plat offre l'avantage d'une réponse en fréquence beaucoup plus plate, au prix d'un pouvoir séparateur réduit. L'erreur commise sur l'amplitude d'une raie est ainsi inférieure à 0,1 dB. Elle est adaptée aux signaux de très bonne pureté spectrale.

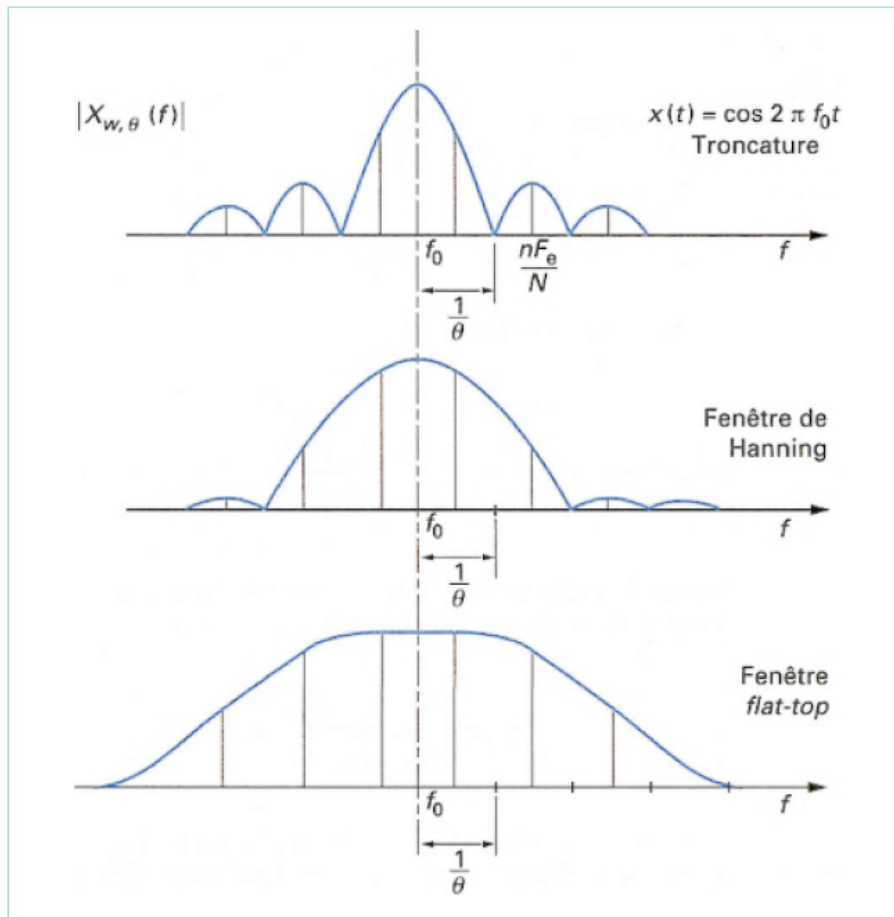


FIGURE 2 – Transformée de Fourier discrète d'un signal sinusoïdal de fréquence  $f_0$  pour différentes fenêtres de pondération. Le symbole  $\theta$  correspond à  $T$  dans le texte.

### 2.1.5 Etude de la pureté spectrale d'une source

Pour une source sinusoïdale (fréquence  $f_0 = 1/T_0$ ), le spectre présente un pic à la fréquence  $f_0$ . Une fonction périodique non sinusoïdale peut se décomposer en séries de Fourier et on voit apparaître dans le spectre un pic fondamental à la fréquence  $f_0$  et une série d'harmoniques aux fréquences multiples

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi nft + b_n \sin 2\pi nft. \quad (8)$$

On appelle taux de distorsion harmonique (abrégié THD, d'après l'anglais *total harmonic distortion*) le rapport entre la puissance dissipée dans les harmoniques d'ordre supérieur à un et puissance dissipée dans le fondamental (ordre 1).

$$THD = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}{a_1^2 + b_1^2} \quad (9)$$

La THD est un très bon indicateur de la pureté spectrale d'un oscillateur.

## 3 Travail experimental

Le but de la manipulation est de se familiariser avec l'utilisation d'un analyseur de spectre à transformée de Fourier rapide.

### 3.1 Matériel disponible :

- Un analyseur de spectre à transformée de Fourier rapide HP 35660A, 0-102 kHz (une synthèse de la notice d'utilisation est fournie)
- Un synthétiseur de fréquences HP 8904A Multifunction synthesizer
- Une table traçante HP 7470A plotter

### 3.2 Étude des caractéristiques de l'analyseur

#### 3.2.1 Étude d'un signal périodique de période connue

Synthétiser un signal sinusoïdal de fréquence 2000 Hz, d'amplitude 1 V. Visualiser le signal temporel et le spectre en faisant varier la gamme de fréquence de l'analyseur. On essaiera diverses fonctions de l'analyseur (trigger, average) et on évaluera la correspondance entre les différentes échelles proposées en ordonnées et une amplitude de 1 V.

#### 3.2.2 Étude de l'influence de la fenêtre de troncature

Dans le cas d'une sinusoïde de  $f_0 = 2000$  Hz et d'amplitude 2 V, et une fenêtre rectangulaire, le pic du spectre s'étale sur un certain nombre de points. Rechercher ce qui se passe pour des fréquences voisines, et identifier l'erreur commise quand la fréquence du signal ne tombe pas

exactement sur un échantillon. Comparer avec les résultats obtenus avec d'autres fenêtres de troncature : classer les fenêtres étudiées en fonction d'une part de l'amplitude du pic restitué et d'autre part de sa largeur à mi-hauteur. Conclure.

On pourra recommencer l'étude pour le cas où un bruit d'amplitude plus ou moins importante est superposé au signal. Il s'agit alors de rechercher les conditions optimales d'extraction du signal du bruit.

### 3.2.3 Étude du pouvoir séparateur des signaux

- Synthétiser l'addition de deux signaux périodiques (sinusoïdes) de fréquences voisines (séparées de moins de 5 points du spectres)  $f_1 = 1000$  Hz et  $f_2 = f_1 \pm \Delta f$ ; d'amplitude  $V_1 = 1V$  et  $V_2 = 2V$
- Étudier l'effet des différentes fenêtres sur la séparation de ces deux signaux dans les cas où  $f_1$  et/ou  $f_2$  sont multiples de  $\Delta f$  et quand elles ne le sont ni l'une ni l'autre, avec successivement :
  1.  $V_1 = V_2$
  2.  $V_1 = 100V_2$
  3.  $V_1 = 100V_2$  avec un bruit superposé d'amplitude égale à  $V_2$
  4.  $V_1 = 100V_2$  avec un bruit superposé d'amplitude égale à  $V_1$

### 3.3 Étude de la pureté spectrale d'une source

On étudiera successivement la source fournie avec l'analyseur (source interne), à la fréquence 10,24 kHz et une source en créneaux carrés synthétisée à la fréquence 2000 Hz.

- Faire le spectre, par exemple avec un moyennage sur 10 spectres, et spécifier l'échelle verticale en  $\text{dBV}_{rms}$  ou en  $V_{rms}$  ;
- Suivant l'étendue en fréquence observée, on verra un certain nombre d'harmoniques, dont on peut relever à la main l'amplitude (**<MARKER>**) et calculer directement le THD.
- Appuyer sur **<MARKER>** puis sur **<MARKER TO PEAK>** pour placer le pointeur sur le fondamental. On peut alors relever l'amplitude absolue du fondamental.
- Pour trouver l'amplitude et la fréquence des harmoniques, non en absolu mais en relatif par rapport au fondamental appuyer sur **[OFFSET] ON**.

L'analyseur de spectre HP permet un calcul direct de le THD, en se limitant évidemment au nombre d'harmoniques visualisées sur l'écran. Presser **<MARKER FCTN>**, **[HARMONIC]**, **[FNDMNTL]** puis la valeur de la fréquence  $f_0$ . Le nombre d'harmoniques utilisées dans le calcul ( $n \leq 20$  par défaut) peut être spécifié par **[DEFINE NUM HARM]** et une valeur.

On effectuera successivement des mesures dans les conditions suivantes :

- Fréquence  $f_0 =$  multiple entier de  $\Delta f$  ou non
- Longueur d'enregistrement : variable ;
- Nombre de mesures pour une moyenne =  $Nm = 30$  et 100
- Fenêtres : Hanning, Rectangle et Flat top

Comparer les valeurs de THD fournie par l'analyseur de spectre pour différentes conditions expérimentales à celles que l'on peut calculer manuellement en relevant les amplitudes des différentes harmoniques. Essayer de définir l'influence des divers paramètres sur le résultat de la mesure.

### 3.4 Étude de la fonction de transfert

Pour l'étude du filtre, on utilise la source interne de l'analyseur en signal aléatoire et en mode **[PERIODIC CHIRP]**, **[LEVEL]**, **[V<sub>rms</sub>]**. Ce mode est tel que la période est exactement égale à la longueur d'enregistrement (elle est donc "glissante"), si bien qu'il n'y a pas besoin d'une fenêtre de troncature (utiliser **[UNIFORM]**). L'effet d'une telle source est similaire à celui d'une source aléatoire, avec un meilleur rapport S/B.

Utiliser **<INPUT>** **[AUTORANGE]** sur les deux voies. Faire ensuite **<TRIGGER>** puis **[SOURCE TRIGGER]**;

Dans un premier temps, tracer le spectre de la source "periodic chirp" avec un moyennage de 20 puis 50 enregistrements. Conclusion.

Brancher le filtre entre les entrées 1 et 2 de l'analyseur. Se mettre en **<MEAS TYPE>**, 2 voies et **<MEAS DATA>**, **[FREQUENCY RESPONSE]** et régler l'étendue en fréquence. On pourra choisir une échelle logarithmique sur les deux axes.

Choisir un nombre optimum de moyennages en **[RMS]**.

Travailler successivement avec les deux types de sources.

Observer l'amplitude et la phase de la réponse; on pourra les tracer ensemble, en faisant **<FORMAT>** puis **[UPPER/LOWER]** ou **[FRONT/BACK]**.

Calculer la bande passante à -3dB, faire : **<MARKER>**, **[COUPLED ON]**, **[MARKER ON]**; et choisir comme **<ACTIVE TRACE>** celle où est visualisée l'amplitude.

**[MARKER TO PEAK]** (ou rechercher la fréquence remarquable à la main), **[OFFSET]**, **[OFFSET ON]**, **[OFFSET ZERO]**, **[RETURN]**; les positions du pointeur sont alors repérées en relatif par rapport à la fréquence sélectionnée.

**[SEARCH]**, **[TARGET]** **<3>** **[ENTER]** dans le menu **<MARKER>**, puis **[LEFT]** et **[RIGHT]** relever les valeurs. **[RETURN]**, **[OFFSET]**, **[OFFSET OFF]**.